

Sur la  $p$ -dimension des corps.  
Ofer Gabber & Fabrice Orgogozo  
2007-5-7

## 1. Introduction

Soient  $k$  un corps et  $p$  un nombre premier. Rappelons la définition de la  $p$ -dimension de  $k$  ([Ser94], [Kat82]).

Si  $p \neq \text{car. } k$ , on appelle  $p$ -dimension de  $k$ , la  $p$ -dimension cohomologique du groupe profini  $G_k := \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$ , où  $k^{\text{sep}}$  est une clôture séparable de  $k$  (cf. [Ser94]). C'est le plus petit entier  $d$  (où l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que pour tout  $G_k$ -module discret  $M$  de  $p$ -torsion et tout  $n > d$ , les groupes  $H^n(G_k, M)$  soient nuls.

Si  $p = \text{car. } k$ , la définition fait intervenir des invariants différentiels. Pour tout schéma  $X$  et tout entier  $i \in \mathbf{N}$ , notons  $\Omega_X^i := \bigwedge^i \Omega_{X/\mathbf{Z}}^1$  le  $\mathcal{O}_X$ -module des  $i$ -formes différentielles absolues et  $\Omega_{X, \log}^i$  le sous-faisceau étale abélien des formes différentielles *logarithmiques*, c'est-à-dire localement engendré par les sections de la forme  $d\log(x_1) \wedge \cdots \wedge d\log(x_i)$ , pour  $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^\times$ . On pose alors  $H_p^i(k) := H_{\text{ét}}^i(k, \Omega_{k, \log}^{i-1}[-(i-1)])$ ; c'est un analogue de  $H_{\text{ét}}^i(k, \mu_p^{\otimes i-1})$  en caractéristique différente de  $p$ . (Voir 2.2.1 pour une définition équivalente.) Enfin, rappelons que le rang du  $k$ -module  $\Omega_k^1$  est égal au  $p$ -rang de  $k$ , c'est-à-dire au cardinal d'une  $p$ -base (absolue) de  $k$  (cf. [ÉGA IV chap. 0 §21.1]); s'il est fini c'est également l'entier  $r$  pour lequel  $[k : k^p] = p^r$ .

**Définition 1.1** (Kazuya Katô, [Kat82], §0). — La  $p$ -dimension d'un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$  est le plus petit entier  $d$  (où l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que  $\Omega_k^{d+1} = 0$  et  $H_p^{d+1}(k') = 0$  pour toute extension finie  $k'/k$ .

L'objet de cet article est de démontrer le résultat suivant, conjecturé par K. Katô :

**Théorème 1.2.** — Soit  $A$  un anneau local hensélien excellent, intègre de dimension  $d$ . Soient  $k$  son corps résiduel, de caractéristique  $p > 0$ , et  $K$  son corps des fractions. Alors, on a l'égalité

$$\dim_p(K) = \dim(A) + \dim_p(k).$$

Dans *op. cit.*, ce théorème est démontré par K. Katô dans le cas particulier essentiel où  $A$  est un anneau de valuation discrète complet (cf. 2.3.1). Son théorème est une généralisation d'un théorème de S. Lang ([Ser94], chap. II, §3.3 et §4.3) au cas d'un corps résiduel non algébriquement clos. La nécessité de prendre en compte le  $p$ -rang dans le cas d'un corps résiduel non nécessairement parfait avait été conjecturée par M. Artin dans [SGA<sub>4</sub> x 2.2]. La démonstration de K. Katô utilise la  $K$ -théorie de Milnor, qui permet en caractéristique mixte, par l'intermédiaire des symboles cohomologiques, différentiels, et du théorème de Bass-Tate ([BT73], I 4.3), de faire le pont entre la cohomologie galoisienne du corps des fractions et les formes différentielles absolues sur le corps résiduel.

Le cas de la dimension deux est également établi par K. Katô, en caractéristique mixte (et dans le cas d'un corps résiduel algébriquement clos), dans [Sai86], §5. Sa démonstration,  $K$ -théorique, repose sur le théorème de Merkurjev-Suslin ainsi que sur la résolution des singularités des surfaces.

Notons que si  $A$  est un anneau strictement local excellent, intègre, de corps des fractions  $K$ , et  $\ell$  un nombre premier *inversible dans  $A$* , on a

$$\dim_\ell K = \dim A,$$

comme conjecturé par M. Artin dans [SGA<sub>4</sub> X 3.1]. On a en effet  $\dim_\ell K \geq \dim A$  ([SGA<sub>4</sub> X 2.4]); par ailleurs, le premier auteur a récemment démontré que pour tout  $f \in A$ , on a  $\text{cd}_\ell(\text{Spec}(A[f^{-1}])) \leq \dim A$  ([Gab05b], §8) et donc  $\dim_\ell K \leq \dim A$  par passage à la limite.

Donnons brièvement quelques indications sur la méthode utilisée ici, qui suit de près la technique d'algébrisation introduite par le premier auteur dans [Gab05a] et *op. cit.* (voir également [Mat02], théorème 2.2). Utilisant le théorème d'approximation de Popescu, on se ramène au cas d'un anneau local complet noethérien. En égale caractéristique, on utilise alors le théorème de Cohen-Gabber ([Gab05a], 8.1), dont la démonstration est rappelée en appendice (cf. 7.1), qui précise le théorème

de structure de Cohen et permet, grâce au théorème d'algébrisation d'Elkik, de faire de cet anneau le complété d'un anneau local hensélien essentiellement de type fini et de dimension relative un sur un anneau local complet de dimension un de moins. Les prémices d'une telle idée se trouvent déjà dans l'exposé de M. Artin [SGA<sub>4</sub> XIX §1 & §6]. En caractéristique mixte, dans le cas où  $p$  est ramifié dans  $A$ , on utilise le théorème de Epp, ainsi que le théorème 1.2 en égale caractéristique, pour pouvoir algébriser nos données. Dans les deux cas, on procède par récurrence sur la dimension de l'anneau, en utilisant le théorème de Katô (dimension un) et, en caractéristique mixte, un théorème de comparaison hensélien/formel dû à K. Fujiwara et au premier auteur.

Le plan de l'article est le suivant : après quelques rappels et compléments sur la  $p$ -dimension (§2), on commence par minorer la  $p$ -dimension du corps des fractions (§3). La démonstration est très semblable à celle de K. Katô en dimension deux. Majorer la  $p$ -dimension est plus difficile. On commence par le cas d'égale caractéristique (§4), qui nous permet de traiter ensuite le cas d'inégale caractéristique (§5). En inégale caractéristique, le théorème principal est généralisé (§6) au cas d'un ouvert affine de  $\text{Spec}(A[p^{-1}])$ . Enfin, dans un appendice (§7), on rappelle la démonstration du théorème de Cohen-Gabber mentionné ci-dessus.

Le second auteur souhaite remercier Luc Illusie pour d'utiles commentaires sur les versions précédentes de ce texte, ainsi que Takeshi Saitô et l'université de Tôkyô pour leur chaleureux accueil durant le premier semestre 2006-2007.

## 2. $p$ -dimension : rappels et compléments

Dans cette section on réunit divers lemmes (dont certains ne sont mis que pour mémoire) qui seront utiles aux cours des dévissages qui vont suivre (réduction au cas normal, resp. complet) ainsi que l'énoncé du théorème de Katô et d'un corollaire important.

### 2.1. $p$ -rang. —

**Lemme 2.1.1.** — *Soit  $k'/k$  une extension finie de corps de caractéristique  $p > 0$ . Alors, le  $p$ -rang de  $k$  est égal au  $p$ -rang de  $k'$ .*

*Démonstration.* On se ramène immédiatement aux cas où  $k'/k$  est étale ou radicielle de degré  $p$ . Dans le premier cas, le morphisme canonique  $k' \otimes_k \Omega_k^1 \rightarrow \Omega_{k'}^1$  est un isomorphisme et le résultat s'obtient alors en considérant le rang de ces modules. Dans le second cas, considérons  $a \in k'$  tel que  $k' = k(a)$  et posons  $b := a^p \in k$ . L'élément  $b$  n'appartient pas à  $k^p$  et l'on peut donc le compléter en une  $p$ -base  $\{b, b_i\}_{i \in I}$  de  $k$ . De l'égalité  $k'^p = k^p(b)$ , on déduit que l'ensemble  $\{a, b_i\}_{i \in I}$  forme une  $p$ -base de  $k'$ .  $\square$

**Lemme 2.1.2.** — *Soit  $K$  un corps discrètement valué de caractéristique  $p$ , de complété  $\widehat{K}$ . Si  $[K : K^p]$  est fini, on a l'inégalité :*

$$[K : K^p] \geq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

*Démonstration.* Soit  $\{b_1, \dots, b_r\}$  une  $p$ -base de  $K$ , de sorte qu'en particulier  $K = K^p(b_1, \dots, b_r)$ . Le sous-corps  $\widehat{K}^p(b_1, \dots, b_r)$  de  $\widehat{K}$  contient donc  $K$  et, étant fini sur  $\widehat{K}^p$ , est fermé dans  $\widehat{K}$ . L'égalité  $\widehat{K} = \widehat{K}^p(b_1, \dots, b_r)$ , et la conclusion, en découlent.  $\square$

**Remarques 2.1.3.** — a) Il se peut que le  $p$ -rang de  $K$  soit dénombrable et celui de  $\widehat{K}$  indénombrable (cf. [Bas78], §3). b) Le lemme est valable sans restriction sur la valuation : d'après [Bourbaki, A.C. chap. 6, §8, N°2 Prop. 2], le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \widehat{K} \\ \text{Frob} \uparrow & & \uparrow \text{Frob} \\ K & \longrightarrow & \widehat{K} \end{array}$$

induit une surjection  $\widehat{K} \otimes_K K \rightarrow \widehat{K}$ . L'inégalité désirée en résulte immédiatement.

Réciproquement :

**Lemme 2.1.4.** — *Soit  $A$  un anneau local hensélien excellent intègre de caractéristique  $p > 0$ , de corps des fractions  $K$ . Soient  $\widehat{A}$  le complété de  $A$  et  $\widehat{K}$  son corps des fractions. Alors,*

$$[K : K^p] \leq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

*De plus, si  $[K : K^p]$  est fini, c'est une égalité.*

Rappelons que  $\widehat{A}$  est intègre ([ÉGA IV<sub>4</sub> 18.9.2]).

*Démonstration.* — L'extension  $\widehat{K}/K$  est séparable de sorte que le morphisme canonique  $\widehat{K} \otimes_K \Omega_K^1 \rightarrow \Omega_{\widehat{K}}^1$  est une injection ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 20.6.3]). Vérifions la seconde assertion. Sous les hypothèses faites, la normalisation de  $A$  dans  $K^{1/p}$  est finie sur  $A$ , de sorte que  $\text{Frob} : A \rightarrow A$  est fini et que le morphisme  $\widehat{A} \otimes_{A, \text{Frob}} A \rightarrow \widehat{A}$  est un isomorphisme (cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>I</sub> 7.3.3]; rappelons à cette occasion qu'un anneau excellent est noethérien). On en tire immédiatement que  $\Omega_A^1 \otimes_A \widehat{A} \rightarrow \Omega_{\widehat{A}}^1$  est un isomorphisme. (Cela résulte du fait que  $\Omega_A^1 = \Omega_{\text{Frob}: A \rightarrow A}^1$  et de même pour  $\widehat{A}$ .)  $\square$

**Lemme 2.1.5.** — *Soit  $A$  un anneau de caractéristique  $p > 0$  possédant une  $p$ -base finie  $\{b_i\}_{i \in I}$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , l'ensemble  $\{b_i\}_{i \in I} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$  constitue une  $p$ -base de l'anneau  $A[[x_1, \dots, x_n]]$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de traiter le cas où  $n = 1$ . Pour  $\vartheta : I \rightarrow [0, p-1]$ , posons  $b^\vartheta = \prod_{i \in I} b_i^{\vartheta(i)}$ . La conclusion résulte des décompositions :

$$A[[X]] = \bigoplus_{i=0}^{p-1} A[[X^p]]X^i,$$

$$A = \bigoplus_{\vartheta \in [0, p-1]^I} A^p b^\vartheta,$$

et de la finitude de l'ensemble  $I$ .  $\square$

Enfin, signalons le lemme suivant :

**Lemme 2.1.6.** — *Soit  $A$  un anneau intègre ayant une  $p$ -base  $\{b_i\}_{i \in I}$ . Alors, les éléments  $b_i$  forment une base de  $\text{Frac} A$ .*

*Démonstration.* — C'est immédiat en chassant les dénominateurs par une puissance  $p$ -ième.  $\square$

## 2.2. Les groupes $H_p^i(k)$ . —

**Proposition 2.2.1.** — *Soient  $k$  un corps et  $i$  un entier. Le groupe  $H_p^{i+1}(k) := H_{\text{ét}}^1(k, \Omega_{k, \log}^i)$  est isomorphe au conoyau du morphisme*

$$\wp = 1 - C^{-1} : \Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i / d\Omega_k^{i-1}$$

où  $1$  est la projection canonique  $\Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i / d\Omega_k^{i-1}$  et  $C^{-1}$  l'isomorphisme de Cartier inverse. Le morphisme  $\wp$  est caractérisé par la formule :

$$x \text{dlog}(y_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(y_i) \mapsto (x - x^p) \text{dlog}(y_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(y_i) \bmod d\Omega_k^{i-1}.$$

*Démonstration.* Rappelons que l'on a une suite exacte (de faisceaux étales abéliens sur  $\text{Spec}(k)$ )

$$0 \rightarrow \Omega_{k, \log}^i \rightarrow (\Omega_k^i)_{d=0} \xrightarrow{1-C} \Omega_k^i \rightarrow 0,$$

où  $C$  est l'opérateur de Cartier sur les formes fermées (cf. [Ill79] chap. 0, §2.4 et [Tsu96], 6.1.1.). (Pour  $i = 1$ , l'exactitude à gauche est la caractérisation classique due à P. Cartier des 1-formes logarithmiques.) On déduit immédiatement de l'isomorphisme de Cartier que le noyau de  $1 - C$  s'identifie naturellement au noyau de  $\wp$ . Il suffit alors de considérer la suite exacte longue de

cohomologie associée et l'acyclicité des faisceaux cohérents pour conclure. (Voir aussi [Kat89], §1.3.)  $\square$

**2.2.2. Exemples.** — Pour tout corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$ , on a  $H_p^1(k) = k/\wp(k)$ , où  $\wp$  est le morphisme d'Artin-Schreier usuel. En particulier, il est trivial pour un corps séparablement clos. Si  $k$  est parfait (de façon équivalente : de  $p$ -rang nul),  $H_p^2(k)$  — qui est en général un quotient de  $\Omega_k^1$  — est nul. On peut montrer plus précisément que  $H_p^2(k)$  s'identifie au sous-groupe de  $\text{Br}(k)$  formé des éléments annulés par  $p$ , par l'intermédiaire de l'application envoyant une forme différentielle  $\omega = x d\log(y)$  ( $x \in k, y \in k^\times$ ), sur l'algèbre centrale simple de rang  $p^2$  définie par des générateurs  $X, Y$  liés par les relations  $X^p - X = x, Y^p = y$  et  $YXY^{-1} = X + 1$  (cf. [Ser94], chap. II, §2.2 et [Ser68], chap. XIV, §5).

**2.2.3. Trace.** — Remarquons maintenant que l'on peut définir une trace dans le présent contexte. La fonctorialité *contravariante* en le corps est quant à elle élémentaire.

Si  $k'/k$  est une extension finie étale de corps de caractéristique  $p > 0$ , la trace  $\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} : \Omega_{k'}^i \rightarrow \Omega_k^i$  (déduite du morphisme  $\text{Tr}_{k'/k} : k' \rightarrow k$  grâce à l'isomorphisme  $k' \otimes_k \Omega_k^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{k'}^i$ ) envoie  $d\Omega_{k'}^{i-1}$  dans  $d\Omega_k^{i-1}$  et induit un morphisme, noté  $\text{Tr}_{k'/k}^{i,H}$ , de  $H_p^{i+1}(k')$  dans  $H_p^{i+1}(k)$ .

Si  $k'/k$  est finie non nécessairement étale, de caractéristique  $p > 0$ , une telle trace est construite par K. Katô à partir de la norme  $N_{k'/k}^K$  en  $K$ -théorie de Milnor (cf. [BK86], p. 126 ; voir également [Fuk01], §2). Cette trace est caractérisée par les propriétés suivantes :

- i. pour  $i = 0$ , c'est la trace usuelle,
- ii. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_i^M(k') & \xrightarrow{\text{dlog}} & \Omega_{k'}^i \\ \text{N}_{k'/k}^{i,K} \downarrow & & \downarrow \text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \\ K_i^M(k) & \xrightarrow{\text{dlog}} & \Omega_k^i \end{array},$$

- iii. on a compatibilité avec  $d$  :  $d(\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}(\omega)) = \text{Tr}_{k'/k}^{i+1,\Omega}(d\omega)$  (pour  $\omega \in \Omega_{k'}^i$ ),
- iv. elle satisfait une formule de projection :  $\text{Tr}_{k'/k}^{i+j}(\omega \wedge \omega') = \text{Tr}_{k'/k}^i(\omega) \wedge \omega'$  si  $\omega \in \Omega_{k'}^i$  et  $\omega' \in \Omega_{k'}^j$ ,
- v. elle est compatible aux extensions de corps :  $\text{Tr}_{k''/k}^{i,\Omega} \circ \text{Tr}_{k'/k''}^{i,\Omega} = \text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}$ .

Si  $k' = k(a)/k$ , où  $a^p = b \in k$ , est une extension radicielle de degré  $p$ , il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus que l'on a  $\text{Tr}_{k'/k}^{1,\Omega}(\text{dlog}(a)) = \text{dlog}(b)$ , et de la formule de projection que l'on a, pour tout entier  $i \geq 0$  :

$$\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \left( \left( \sum_{j=0}^{p-1} c_j a^j \right) \text{dlog}(a) \wedge \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_{i-1}) \right) = c_0 \text{dlog}(b) \wedge \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_{i-1}),$$

où les  $c_j$  appartiennent à  $k$  et les  $b_j$  à  $k^\times$ .

On déduit de cette formule que la trace commute au morphisme  $C^{-1} : \Omega^i \rightarrow \Omega^i/d\Omega^{i-1(i)}$  de sorte qu'elle induit par passage au quotient un morphisme trace  $\text{Tr}_{k'/k}^{i,H}$  sur les  $H_p^{i+1}$ . De plus, on constate que le morphisme induit est une *surjection* pour  $i$  égal au  $p$ -rang de  $k$ .

Le lemme immédiat suivant rend plus explicite la structure de  $H_p^{r+1}(k)$ , où  $r$  est le  $p$ -rang d'un corps  $k$  comme quotient de  $\Omega_k^r \simeq k$ . (Voir aussi 2.2.7 pour une démonstration du lemme 2.2.5 qui n'en fait pas usage.)

**Lemme 2.2.4.** — Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $b_1, \dots, b_r$  une  $p$ -base. Pour toute fonction  $\vartheta : [1, r] \rightarrow [0, \dots, p-1]$ , posons  $b^\vartheta := b_1^{\vartheta(1)} \cdots b_r^{\vartheta(r)}$  et notons  $k_{>0}$  le sous- $k^p$ -espace

<sup>(i)</sup>Dans le cas radiciel de degré  $p$ , on se ramène aisément au fait que pour chaque  $0 < j < p$  et tous  $c \in k, b, b'_1, \dots, b'_{i-1} \in k^\times$ , on a  $c^p b^{j-1} db \wedge \text{dlog}(b') = d(\frac{c^p}{j} b^j \text{dlog}(b')) \in d\Omega_k^{i-1}$ , où l'on pose  $\text{dlog}(b') := \text{dlog}(b'_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b'_{i-1})$ . Dans le cas étale, cela résulte de ce que  $\text{Tr}(a)^p = \text{Tr}(a^p)$ .

vectoriel  $\oplus_{\vartheta \neq 0} k^p b^\vartheta$  de  $k$ . L'isomorphisme  $k \rightarrow \Omega_k^r$ , défini par  $\lambda \mapsto \lambda \text{dlog}(b) := \lambda \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_r)$  induit par passage au quotient un isomorphisme de  $\mathbf{F}_p$ -espaces vectoriels

$$k/(\wp(k) + k_{>0}) \xrightarrow{\sim} H_p^{r+1}(k).$$

*Démonstration.* — Calculons l'image  $d\Omega_k^{r-1} \subset \Omega_k^r = k \cdot \text{dlog}(b) = \oplus_{\vartheta} (k^p \cdot b^\vartheta \text{dlog}(b))$ . Pour chaque  $\vartheta, i$ , considérons l'élément

$$\omega_{\vartheta,i} := b^\vartheta \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_{i-1}) \wedge \text{dlog}(b_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_r)$$

de  $d\Omega_k^{r-1}$ . Ces formes engendrent  $\Omega_k^{r-1}$  comme  $k^p$ -espace vectoriel. On a

$$d\omega_{\vartheta,i} = (-1)^{i+1} \vartheta(i) b^\vartheta \text{dlog}(b) = ((-1)^{i+1} \vartheta(i))^p b^\vartheta \text{dlog}(b).$$

Ainsi, faisant varier  $\vartheta, i$ , on en déduit que

$$d\Omega_k^{r-1} = k_{>0} \cdot \text{dlog}(b).$$

Le quotient  $\Omega_k^r/d\Omega_k^{r-1}$  s'identifie donc à  $k/k_{>0}$  par l'application  $\lambda \bmod k_{>0} \mapsto \lambda \text{dlog}(b) \bmod d\Omega_k^{r-1}$ , et le morphisme  $\wp : \Omega_k^r \rightarrow \Omega_k^r/d\Omega_k^{r-1}$  à  $\lambda \mapsto \lambda - \lambda^p \bmod k_{>0}$ . Ainsi,  $H_p^{r+1}(k)$  est isomorphe à

$$k/(k_{>0} + \wp(k)).$$

□

Voici maintenant un analogue du lemme 2.1.1.

**Lemme 2.2.5.** — Soit  $K$  un corps discrètement valué de caractéristique  $p > 0$ , de  $p$ -rang  $r < +\infty$ . L'application canonique

$$H_p^{r+1}(K) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{K})$$

est une surjection. En particulier, si  $H_p^{r+1}(K)$  est nul, il en est de même de  $H_p^{r+1}(\widehat{K})$ .

*Démonstration.* — Si le  $p$ -rang de  $\widehat{K}$  est strictement inférieur à  $r$ ,  $H_p^{r+1}(\widehat{K})$  est nul et il n'y a rien à démontrer. Supposons le donc égal à  $r$ . Le morphisme déduit de la fonctorialité contravariante en le corps correspond, d'après le lemme 2.2.4 et sa démonstration, au morphisme canonique

$$K/(\wp(K) + K_{>0}) \rightarrow \widehat{K}/(\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0}).$$

(Les choix de  $K_{>0}$  et  $\widehat{K}_{>0}$  se font relativement à une  $p$ -base commune.) Il nous faut suffire donc de montrer que le morphisme composé

$$K \hookrightarrow \widehat{K} \twoheadrightarrow \widehat{K}/(\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0})$$

est une surjection. On va montrer plus précisément que le morphisme  $K \rightarrow \widehat{K}/\wp(\widehat{K})$  est une surjection. Soit  $\lambda \in \widehat{K}$ ; considérons  $\lambda_0 \in K$  tel que  $v(\lambda - \lambda_0) > 0$ . D'après le lemme ci-dessous, il existe  $\alpha \in \widehat{K}$  tel que  $\lambda - \lambda_0 = \wp(\alpha)$ . Ainsi,  $\lambda \equiv \lambda_0$  modulo  $\wp(\widehat{K})$ . □

**Lemme 2.2.6.** — Pour tout anneau local  $A$ , complet de caractéristique  $p > 0$ , le morphisme  $\wp : A \rightarrow A$ ,  $a \mapsto a - a^p$ , induit une surjection  $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_A$ .

*Démonstration.* — Soit  $a \in A$ ; l'identité  $a = \wp(a) + a^p$  entraîne par récurrence l'égalité

$$a = \wp(a + a^p + \cdots + a^{p^n}) + a^{p^{n+1}}$$

pour tout  $n \geq 0$ . Pour  $a \in \mathfrak{m}_A$ , la suite  $(a + a^p + \cdots + a^{p^n})_{n \geq 0}$  converge dans  $A$  vers un élément  $b \in \mathfrak{m}_A$ ; d'après l'égalité ci-dessus on a alors  $a = \wp(b)$ . □

**Remarque 2.2.7.** — La conclusion du lemme 2.2.5 est vraie pour tous les groupes  $H_p^{i+1}$  (et pas seulement pour  $i = r$ ). Il suffit pour cela de montrer que  $\Omega_K^i$  est engendré (comme groupe abélien) par  $\Omega_K^i$  et les formes  $\alpha \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_i}{b_i}$ , où  $\alpha \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$  (l'idéal maximal de l'anneau des entiers) et les  $b_j$  sont dans  $\widehat{K}^\times$ . Étant donné une forme  $\beta \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_i}{x_i}$ ,  $\beta, x_j \in \widehat{K}^\times$ , on peut trouver des

$y_j \in K$  tels que  $v(x_j - y_j) > v(x_j)$  et  $v(x_j - y_j) + v(\beta) > v(x_j)$ . Posons  $\alpha_j := \frac{x_j}{y_j} - 1$ , de sorte que  $x_j = y_j(\alpha_j + 1)$  et donc (pour chaque  $j$ )

$$\frac{dx_j}{x_j} = \frac{dy_j}{y_j} + \frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1} \frac{d\alpha_j}{\alpha_j}.$$

L'hypothèse sur les valuations signifie que  $\frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1}$  et  $\beta \frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1}$  appartiennent à  $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$ .

Cela nous permet de remplacer les  $x_j$  par les  $y_j$  ; on conclut en approchant  $\beta$  comme ci-dessus.

En dimension supérieure on a la réciproque suivante :

**Proposition 2.2.8.** — *Soit  $A$  un anneau local hensélien excellent intègre de corps des fractions  $K$ . Soient  $\widehat{A}$  son complété et  $\widehat{K}$  le corps des fractions de  $\widehat{A}$ . Supposons les  $p$ -rangs de  $K$  et  $\widehat{K}$  égaux à un entier  $r < +\infty$ . Le morphisme canonique*

$$H_p^{r+1}(K) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{K})$$

*est une injection.*

La démonstration fait usage de la généralisation suivante du théorème d'approximation d'Artin :

**Théorème 2.2.9 (Dorin Popescu, [Pop86], théorème 1.3).** — *Soit  $A$  un anneau local excellent hensélien. Pour tout système fini d'équations polynomiales à coefficients dans  $A$ , l'ensemble des  $A$ -points est dense, pour la topologie  $\mathfrak{m}_A$ -adique, dans l'ensemble des  $\widehat{A}$ -points.*

*Démonstration de la proposition 2.2.8.* — Soit  $\{b_1, \dots, b_r\}$  une  $p$ -base de  $K$  ; c'est également une  $p$ -base de  $\widehat{K}$  (2.1.4). Quitte à les multiplier par une puissance  $p$ -ième convenable, on peut supposer les  $b_i$  dans  $A$ . Soient  $K_{>0}$  et  $\widehat{K}_{>0}$  comme en 2.2.4, relativement à ces bases. Il s'agit de montrer que si un élément  $\lambda \in K$  appartient à  $\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0}$ , il appartient également à  $\wp(K) + K_{>0}$ . Écrivons

$$\lambda = \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} - \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^p\right) + \sum_{\vartheta \neq 0} \left(\frac{\alpha_\vartheta}{\beta_\vartheta}\right)^p b^\vartheta,$$

où les  $\alpha_\star$  sont dans  $\widehat{A}$ , les  $\beta_\star$  dans  $\widehat{A} - \{0\}$ , et  $\vartheta$  parcourt, comme dans *loc. cit.*, l'ensemble des applications  $[1, r] \rightarrow [0, p-1]$ . De façon équivalente, l'équation à coefficients dans  $A$

$$\left(\prod_{\vartheta} Y_{\vartheta}\right)^p \lambda = \left(\prod_{\vartheta \neq 0} Y_{\vartheta}\right)^p \cdot (Y_0^{p-1} X_0 - X_0^p) + \sum_{\vartheta \neq 0} X_{\vartheta}^p \left(\prod_{\vartheta' \neq \vartheta} Y_{\vartheta'}^p\right) b^\vartheta$$

a pour solution

$$X_{\vartheta} = \alpha_{\vartheta}, Y_{\vartheta} = \beta_{\vartheta},$$

où  $\vartheta$  parcourt cette fois-ci  $[0, p-1]^{[1, r]} \cup \{0\}$ .

D'après le théorème d'approximation ci-dessus, cette équation a également une solution dans  $A$ , dont les coordonnées  $Y$  sont non nulles, de sorte que  $\lambda$  appartient bien à  $\wp(K) + K_{>0}$ .  $\square$

**Remarque 2.2.10.** — Du fait que l'on peut définir un opérateur de Cartier inverse  $C^{-1} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^i / d\Omega_A^{i-1}$  pour tout anneau  $A$  de caractéristique  $p$  ([Kat70], 7.2), on peut également déduire le résultat précédent (en tout degré) de l'énoncé 5.2.2.

**Corollaire 2.2.11.** — *Sous les hypothèses de 2.1.4, on a l'inégalité*

$$\dim_p(K) \leq \dim_p(\widehat{K}),$$

où  $p$  est la caractéristique du corps  $K$ .

*Démonstration.* — Si  $[K : K^p] < [\widehat{K} : \widehat{K}^p]$ , il n'y a rien à démontrer de sorte que l'on peut supposer les  $p$ -rangs finis, égaux à  $r \in \mathbf{N}$ . Il faut montrer que si  $H_p^{r+1}(K') \neq 0$  pour une extension finie  $K'$  de  $K$ , il existe une extension finie  $L/\widehat{K}$  telle que  $H_p^{r+1}(L) \neq 0$ . D'après la proposition précédente, il suffit de considérer le corps des fractions du complété du normalisé de  $A$  dans  $K'$ .  $\square$

(D'après 1.2, cette inégalité est en fait une égalité.)

Terminons par une propriété d'invariance, élémentaire mais cruciale, de la  $p$ -dimension.

**Lemme 2.2.12.** — Soient  $k$  un corps,  $k'/k$  une extension finie et  $p$  un nombre premier. Si  $\dim_p(k)$  est fini, on a égalité :

$$\dim_p(k) = \dim_p(k').$$

*Démonstration.* — Si  $p$  est inversible sur  $k$ , c'est [Ser94], chapitre II, ¶4.1, proposition 10. Si  $p = \text{car. } k$ , on sait déjà (2.1.1) que les  $p$ -rangs sont égaux. Il en résulte que l'on a une inégalité :  $\dim_p(k) \geq \dim_p(k')$ . Supposons  $r = p\text{-rang}(k)$  fini. Quitte à remplacer  $k$  par une extension finie et  $k'$  par une extension composée, on est ramené à montrer que si  $H_p^{r+1}(k') = 0$ , on a également  $H_p^{r+1}(k) = 0$ . Cela résulte de la surjectivité de la trace (2.2.3).  $\square$

### 2.3. Le théorème de Katô. —

**Théorème 2.3.1 (Kazuya Katô, [Kat82]).** — Soit  $A$  un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et de corps des fractions  $K$ . On a l'égalité

$$\dim_p(K) = 1 + \dim_p(k).$$

Rappelons que l'hypothèse d'excellence signifie ici que l'extension  $\text{Frac } \widehat{A}/\text{Frac } A$  est séparable.

Le lecteur pourra consulter avec profit l'exposé de J.-L. Colliot-Thélène [CT99] pour une démonstration du théorème ci-dessus.

Voici maintenant un corollaire du théorème précédent, qui est l'analogue du (corollaire au) théorème de Tsen ([Ser94], chapitre II, §3.3 et §4.2).

#### Corollaire 2.3.2 (Kazuya Katô et Takako Kuzumaki, [KK86])

Soient  $K/k$  une extension de degré de transcendance  $N$ , et  $p$  un nombre premier. On a l'inégalité

$$\dim_p(K) \leq N + \dim_p(k).$$

(La démonstration du corollaire se fait par réduction au cas bien connu de la caractéristique nulle.)

**Remarque 2.3.3.** — Cette même méthode permet de déduire l'invariance de la  $p$ -dimension par extension finie du théorème de Katô.

Terminons cette section par une variante, élémentaire mais plus explicite, du théorème 2.3.1, qui semble laissée en exercice au lecteur dans la littérature (cf. p. ex. [Kat82]).

**Proposition 2.3.4.** — Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et de  $p$ -rang  $r < +\infty$ . Le morphisme

$$H_p^{r+1}(k) \rightarrow H_p^{r+2}(k((t)))$$

envoyant la classe de  $\omega$  sur la classe de  $\omega \wedge \text{dlog}(t)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Soit  $\{b_1, \dots, b_r\}$  une  $p$ -base du corps  $k$ ; il résulte de 2.1.5 et 2.1.6 que  $\{b_1, \dots, b_r, t\}$  est une  $p$ -base de  $k((t))$ . Considérons  $k_{>0}$  et  $k((t))_{>0}$  comme en 2.2.4 relativement à ces  $p$ -bases. (Rappelons que  $k((t))_{>0}$  est un sous  $k((t))^p$ -espace vectoriel de  $k((t))$ .) Le morphisme  $\omega \mapsto \omega \wedge \text{dlog}(t)$  de l'énoncé correspond au morphisme canonique

$$k/(\wp(k) + k_{>0}) \xrightarrow{(\star)} k((t))/(\wp(k((t))) + k((t))_{>0})$$

(où  $\wp$  est le morphisme d'Artin-Schreier usuel) déduit de l'inclusion  $k \hookrightarrow k((t))$  par passage au quotient.

Vérifions que  $(\star)$  est une surjection. Puisque tout élément de  $k((t))$  de valuation strictement positive est dans l'image de  $\wp$  (cf. lemme 2.2.6 ci-dessus), il suffit de montrer que tout élément  $a_{-n}t^{-n} + \dots + a_{-1}t^{-1} + a_0$  est congru modulo  $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$  à un élément de  $k \subset k((t))$ . On peut supposer  $a_0 = 0$ . Montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  que pour chaque  $a \in k$ , l'élément  $at^{-n}$  appartient à  $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$ . Par construction, pour tout  $a \in k$ , tout  $r \in \mathbf{Z}$  et tout  $i \in [1, p-1]$ , l'élément  $(at^{pr}) \cdot t^i$  appartient à  $k((t))_{>0}$  de sorte que le résultat est acquis pour  $n$  premier à  $p$ .

Considérons maintenant le cas où  $n$  est un multiple de  $p$ ,  $n = rp$ . Écrivons  $a = a_0^p + a_{>0}$  où  $a_0 \in k$  et  $a_{>0} \in k_{>0}$ . On peut alors décomposer  $at^{-rp}$  en :

$$\frac{a}{t^{rp}} = \left(\frac{a_0}{t^r}\right)^p + \frac{a_{>0}}{t^{rp}}.$$

Le second terme,  $\frac{a_{>0}}{t^{rp}}$ , appartient à  $k((t))_{>0}$  ; le premier terme est égal à  $\frac{a_0}{t^r} - \wp\left(\frac{a_0}{t^r}\right)$ . L'entier  $r$  étant strictement inférieur à  $rp$ , on peut déduire de l'hypothèse de récurrence que  $\left(\frac{a_0}{t^r}\right)^p$  appartient à  $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$ .

Vérifions maintenant que  $(\star)$  est une injection. Soit  $a \in k$  tel que  $a \in \wp(k((t))) + k((t))_{>0}$  et montrons qu'il appartient à  $\wp(k) + k_{>0}$ . Écrivons  $a = \wp(b^- + b_0 + b^+) + b_{>0}$ , où  $b_0 \in k$ ,  $b^-$  (resp.  $b^+$ ) est un polynôme en  $t^{-1}$  (resp. une série en  $t$ ) sans terme constant, et  $b_{>0} \in k((t))_{>0}$ . Puisque  $\wp(b^-)$  (resp.  $\wp(b^+)$ ) est également un polynôme en  $t^{-1}$  (resp. une série en  $t$ ), sans terme constant, et que  $\wp(b_0)$  appartient à  $\wp(k)$ , il suffit de vérifier que le terme constant de  $b_{>0}$  appartient à  $k_{>0}$ . Rappelons à cette fin que l'on a la décomposition :

$$k((t))_{>0} = \left( \bigoplus_{i \in [1, p-1], \vartheta} k((t))^p b^\vartheta t^i \right) \oplus \left( \bigoplus_{\vartheta \neq 0} k((t))^p b^\vartheta \right),$$

où  $\vartheta$  parcourt l'ensemble des fonctions  $[1, r] \rightarrow [0, p-1]$ . La première somme directe ne contribue pas au terme constant donc il suffit de vérifier que le terme constant d'un élément de  $\bigoplus_{\vartheta \neq 0} k((t))^p b^\vartheta$  appartient à  $k_{>0}$  ; c'est clair. □

### 3. Minoration de $\dim_p(K)$

Dans cette section, on démontre l'inégalité suivante, où  $A$ ,  $K$  et  $k$  sont comme dans **1.2** :

$$(3.a) \quad \dim_p(K) \geq \dim(A) + \dim_p(k).$$

**3.1.** — Soit  $A^\nu$  le normalisé de  $A$  dans son corps des fractions. L'anneau  $A$  étant excellent (cf. [ÉGA IV<sub>2</sub> 7.8]), il est également universellement japonais, de sorte que  $A^\nu$  est fini sur  $A$ . Ce dernier étant hensélien et  $A^\nu$  étant intègre, l'anneau  $A^\nu$  est local. Il est également hensélien et excellent.

Soit  $k^\nu$  le corps résiduel de  $A^\nu$  ; c'est une extension finie de  $k$  de sorte que d'après **2.2.12**, il suffit de démontrer **3.a** dans le cas particulier où  $A$  est *normal*.

**3.2. Le cas d'inégale caractéristique (cf. [Sai86], §5).** — Soit  $A$  comme ci-dessus, de dimension  $\geq 2$ , et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de hauteur un. Soit  $B$  le localisé  $A_{\mathfrak{p}}$  — de corps des fractions  $K$  —,  $\widehat{B}$  son complété, et  $L$  le corps des fractions de  $\widehat{B}$ . Puisque toute  $L$ -algèbre étale est induite par une  $K$ -algèbre étale ([SGA<sub>4</sub> x 2.2.1]), le morphisme  $G_L \rightarrow G_K$  est une *injection*. Compte tenu de la décroissance de la dimension cohomologique par passage à un sous-groupe fermé ([Ser94], chapitre I, §3.3, proposition 14), on a donc :

$$(\star\star) \quad \mathrm{cd}_p(K) \geq \mathrm{cd}_p(L).$$

Le corps  $L$  étant le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet (donc hensélien, excellent), on a de plus l'inégalité

$$\mathrm{cd}_p(L) \geq 1 + \dim_p(\kappa(B)),$$

où  $\kappa(B)$  est le corps résiduel de  $B$ . Cela résulte du théorème **2.3.1**. On achève la démonstration, par récurrence, en remarquant que  $\kappa(B)$  est le corps des fractions de l'anneau local intègre hensélien excellent  $A/\mathfrak{p}$ , de dimension  $\dim(A) - 1$ .



**3.3. Le cas d'égale caractéristique.** — Procédant comme ci-dessus, il nous suffit de démontrer l'analogue de  $(\star\star)$  pour la  $p$ -dimension. C'est le contenu du lemme ci-dessous.

**Lemme 3.3.1.** — *Soient  $K$  un corps discrètement valué de caractéristique  $p > 0$  et  $\widehat{K}$  son complété. L'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\dim_p(K) \geq \dim_p(\widehat{K}).$$

*Démonstration.* — Si  $K$  et  $\widehat{K}$  n'ont pas le même  $p$ -rang, il n'y a rien à démontrer (cf. **2.1.1**) ; supposons donc qu'ils sont égaux à un entier  $r < +\infty$  et qu'il existe une extension finie  $L'/\widehat{K}$  telle que  $H_p^{r+1}(L') \neq 0$ . Il nous faut alors montrer qu'il existe une extension finie  $L/K$  telle que  $H_p^{r+1}(L) \neq 0$ . Soit  $k'$  le corps résiduel de  $L'$  ; c'est une extension finie du corps résiduel  $k$  des corps discrètement valués  $K$  et  $\widehat{K}$ . Il existe donc une extension finie  $L/K$  telle que  $\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_K} = k'$  : on se ramène immédiatement au cas où  $k'/k$  est monogène, qui est bien connu (cf. p. ex. [Ser68], chapitre I, proposition 15 ; voir aussi [ÉGA 0<sub>III</sub> 10.3.1-2]). En particulier, le complété  $\widehat{L}$  de  $L$  est (abstraitement) isomorphe à  $L'$  (tous deux isomorphes au corps des séries de Laurent  $k'((t))$ ). D'après le lemme **2.2.5**, pour un tel corps  $L$ , le morphisme  $H_p^{r+1}(L) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{L}) \simeq H_p^{r+1}(L') \neq 0$  est une surjection. Ainsi,  $H_p^{r+1}(L) \neq 0$ , comme escompté.  $\square$

#### 4. Majoration de $\dim_p(K)$ : le cas d'égale caractéristique

Dans cette section, on démontre par récurrence sur la dimension l'inégalité suivante, où  $A$ ,  $K$  et  $k$  sont comme dans **1.2**, et où l'on suppose de plus  $A$  de caractéristique  $p > 0$  :

$$(4.a) \quad \dim_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

Il résulte de **3.a** et **2.2.11** que l'on peut supposer  $A$  normal complet. (On utilise également le fait que le complété d'un anneau local excellent normal est normal ([ÉGA IV 7.6.1]).)

Notons  $d$  la dimension de  $A$ ,  $k$  son corps résiduel,  $r$  le  $p$ -rang de  $k$ , que l'on peut supposer fini, et  $K$  le corps des fractions de  $A$ . Commençons par un lemme élémentaire.

**Lemme 4.1.** — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$p\text{-rang}(K) = d + r.$$

*Démonstration.* — D'après le théorème de structure de Cohen [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8 ii], il existe un sous-anneau  $A_0$  de  $A$ , isomorphe à  $k[[t_1, \dots, t_d]]$ , tel que le morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$  soit fini de sorte que  $p\text{-rang } K = p\text{-rang } \text{Frac}(A_0)$  (**2.1.1**). D'après **2.1.5**, le terme de droite est égal à  $d + r$ .  $\square$

Il nous faut donc montrer que si  $\dim_p(k) = r$  (c'est-à-dire si  $H_p^{r+1}(k') = 0$  pour toute extension finie  $k'/k$ ), hypothèse que nous allons maintenant supposer satisfaite, on a également  $H_p^{d+r+1}(K') = 0$  pour toute extension finie  $K'/K$ . Il suffit de montrer que  $H_p^{d+r+1}(K) = 0$ .

**4.2.** — Posons  $n = d + r$  et considérons un élément de  $\Omega_K^n$ , que l'on écrit  $\frac{\omega}{f}$ , où  $\omega \in \Omega_A^n / \text{torsion}$  et  $f \in \mathfrak{m}_A - \{0\}$ . D'après le théorème de structure de Cohen-Gabber (**7.1**), il existe un sous-anneau  $A_0$  de  $A$ , isomorphe à  $k[[x_1, \dots, x_d]]$  tel que le morphisme  $\pi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$  soit fini et génériquement étale. Soit  $f_0 = N_{X/X_0}(f) \in A_0$  la norme de l'élément  $f$  ([ÉGA II 6.5]). L'élément  $f_0$  divise  $f$  de sorte que l'on peut supposer, et l'on supposera, que l'élément  $f$  appartient à  $A_0$ . Considérons le fermé  $R$  de  $X_0 := \text{Spec}(A_0)$  au-dessus duquel le morphisme  $\pi$  est ramifié. Il existe un élément non nul  $a \in A_0$  tel que  $R$  soit contenu dans le fermé  $V(a)$ . Enfin, quitte à remplacer  $a$  et  $f$  par  $af$ , on peut supposer  $a = f$ .

Rappelons le théorème de préparation, qui nous permettra de rendre le lieu de ramification fini, par projection, sur un schéma de dimension un de moins.

**Théorème 4.3** (Théorème de préparation de Weierstraß, [Bourbaki, A.C. chap. VII, §3, N°7-8])

Soient  $A$  un anneau local séparé complet d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et  $n$  un entier.

- i. Soit  $k$  un entier et  $f \in A[[\underline{X}, T]]$  ( $\underline{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ) une série entière  $k$ -régulière relativement à  $T$ , c'est-à-dire congrue à  $(u \in A[[T]]^\times) \cdot T^k$  modulo  $(\mathfrak{m}, \underline{X})$ . Pour tout  $g \in A[[\underline{X}, T]]$ , il existe un unique couple  $(q, r) \in A[[\underline{X}, T]] \times A[[\underline{X}]][[T]]$  tel que  $g = qf + r$  et  $\deg_T(r) < k$ .
- ii. Soit  $k$  un entier. Si  $f \in A[[\underline{X}, T]]$  est  $k$ -régulière relativement à  $T$ , il existe un polynôme  $P = T^k + \sum_{i < k} p_i T^i$ , où  $p_i \in (\mathfrak{m}, \underline{X})A[[\underline{X}]]$ , et une unité  $u \in A[[\underline{X}, T]]^\times$  tels que  $f = uP$ .
- iii. Soit  $f \in A[[\underline{X}, T]]$  non nulle modulo  $\mathfrak{m}$ . Il existe un entier  $k$  et un automorphisme  $A[[T]]$ -linéaire  $c$  de  $A[[\underline{X}, T]]$ , tel que  $c(X_i) = X_i + T_i^N$  et  $c(f)$  soit  $k$ -régulier.

D'après (iii) et (ii), quitte à changer de coordonnées, on peut supposer  $a$  et  $f$  égaux à un même polynôme unitaire en  $x_d$ , dont les autres coefficients appartiennent à l'idéal maximal de  $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$ . On notera  $G$  ce polynôme, qui appartient en particulier à l'anneau  $\widetilde{A}_0 := k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$ , hensélisé de  $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$  en l'origine.

**Lemme 4.4.** — Soient  $B$  un anneau local complet noethérien et  $P \in B[X]$  un polynôme de la forme  $X^n + \sum_{i < n} b_i X^i$ , où  $b_i \in \mathfrak{m}_B$ .

- i. Le complété  $(P)$ -adique de  $B\{X\}$  s'identifie à  $B[[X]]$ .
- ii. La paire  $(\text{Spec}(B\{X\}), V(P))$  est hensélienne.

*Démonstration.* — Vérifions (i). Soit  $Q \in B[X]$  un polynôme unitaire. Il résulte de 4.3 (i), que l'anneau quotient  $B[[X]]/(Q)$  est isomorphe comme  $B$ -module à  $B[X]/(X^{\deg(Q)})$  et en particulier fini sur  $B$ . Son sous-anneau (par fidèle platitude)  $B\{X\}/(Q)$  est donc également fini sur  $B$ , donc complet, et finalement isomorphe à  $B[[X]]/(Q)$ . Utilisant ce fait pour  $Q = P^n$ ,  $n \geq 0$ , on en déduit que le séparé-complété  $(P)$ -adique de  $B\{X\}$  est isomorphe à celui de  $B[[X]]$ ; ce dernier est isomorphe à  $B[[X]]$  si l'on suppose de plus que  $P$  n'est pas constant.

Vérifions (ii). Rappelons qu'une paire  $(\text{Spec}(C), V(I))$  est dite *hensélienne* si pour tout polynôme  $f \in C[T]$ , toute racine *simple* de  $g$  dans  $C/I$  se relève en une racine dans  $C$ . On laisse le soin au lecteur de vérifier que pour tout anneau local hensélien  $C$  et tout idéal  $I \subset \mathfrak{m}_C$ , la paire  $(\text{Spec}(C), V(I))$  est hensélienne. On applique alors ce résultat à  $C = B\{X\}$  et  $I = (P)$ .  $\square$

Terminons ces rappels par l'énoncé du théorème d'algébrisation suivant :

**Théorème 4.5** (Renée Elkik, [Elk73], théorème 5). — Soient  $(X = \text{Spec}(A), Y = V(I))$  une paire hensélienne avec  $A$  noethérien, et  $U$  le sous-schéma ouvert complémentaire de  $Y$  dans  $X$ . Notons  $X_{\widehat{Y}}$  le complété de  $X$  le long de  $Y$ ,  $\widehat{Y}$  le fermé correspondant à  $Y$  et  $\widehat{U}$  son complémentaire dans  $X_{\widehat{Y}}$ . Le foncteur  $X' \mapsto X' \times_X X_{\widehat{Y}}$  induit une équivalence de catégories entre la catégorie des  $X$ -schémas finis, étales sur  $U$ , et la catégorie des  $X_{\widehat{Y}}$ -schémas finis, étales sur  $\widehat{U}$ .

Reprenons les notations en vigueur après le théorème 4.3. Le fermé  $V(G)$ , contenant le lieu de ramification, étant défini par une équation polynomiale unitaire à coefficients dans  $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$ , il résulte du lemme 4.4 et du théorème 4.5 que l'on peut algébriser le morphisme  $\pi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ . En d'autres termes, on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X = \text{Spec}(A) & \longrightarrow & \widetilde{X} = \text{Spec}(\widetilde{A}) \\ \downarrow \pi & \square & \downarrow \text{fini, gén. étale} \\ X_0 = \text{Spec}(A_0) & \longrightarrow & \widetilde{X}_0 = \text{Spec}(\widetilde{A}_0) \end{array}$$

où, rappelons-le,  $\widetilde{A}_0$  est  $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$ .

D'après le lemme 4.4, appliqué à  $B = k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$  et  $P = G$ , l'anneau complet  $A$ , fini sur  $A_0$ , s'identifie au complété  $(G)$ -adique de  $\widetilde{A}$ . On peut donc décomposer  $\frac{\omega}{G}$  en

$$\frac{\omega}{G} = \frac{\widetilde{\omega}}{G} + \omega'$$

où  $\tilde{\omega} \in \Omega_{\tilde{A}}^n/\text{torsion}$  et  $\omega' \in G\Omega_A^n/\text{torsion} \subset \mathfrak{m}_A\Omega_A^n/\text{torsion}$ .

Le corps des fractions  $\tilde{K}$  de  $\tilde{A}$  est de degré de transcendance un sur le corps des fractions  $L$  de  $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$ . Par hypothèse de récurrence sur la dimension, et compte tenu du fait que l'on a supposé  $\dim_p(k) = p\text{-rang}(k)$ , on a

$$\dim_p(L) \leq (d-1) + \dim_p(k) = d-1+r.$$

Enfin, d'après le corollaire au théorème de Katô (2.3.2), on a

$$\dim_p(\tilde{K}) \leq \dim_p(L) + 1.$$

Finalement,  $\dim_p(\tilde{K}) \leq d+r$ . Ainsi, la classe de  $\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{G}}$  dans  $H_p^{r+1}(\tilde{K})$  est nulle ; *a fortiori* son image dans  $H_p^{r+1}(K)$  l'est également.

On achève la démonstration en remarquant que la classe  $\omega'$ ,  $\mathfrak{m}$ -adiquement proche de zéro, est elle-aussi nulle dans  $H_p^{r+1}(K)$  : cela résulte d'une variante de 2.2.6, laissée en exercice au lecteur.

## 5. Majoration de $\dim_p(K)$ : le cas d'inégale caractéristique

**5.1.** — Dans cette section, on démontre par récurrence sur la dimension l'inégalité suivante, où  $A$ ,  $K$  et  $k$  sont comme dans 1.2, et où l'on suppose de plus  $A$  de caractéristique nulle :

$$(5.a) \quad \text{cd}_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

Il résulte de 3.a que l'on peut supposer  $A$  normal. Comme en 2.2.11 on utilise le théorème d'approximation de Popescu, sous la forme suivante, pour se ramener au cas complet.

### 5.2. Réduction au cas complet. —

**Lemme 5.2.1.** — *Soit  $A$  un anneau local hensélien excellent intègre de corps des fractions  $K$ . Soient  $\hat{A}$  son complété et  $\hat{K}$  son corps des fractions. Il existe un ensemble filtrant de sous- $K$ -algèbres de type fini  $(B_i)_{i \in I}$  de  $\hat{K}$  tel que  $\hat{K} = \text{colim } B_i$  et chaque morphisme  $\text{Spec}(B_i) \rightarrow \text{Spec}(K)$  ait une section.*

**Corollaire 5.2.2.** — *Soient  $A$  comme en 5.2.1 et  $F$  un foncteur de localement présentation finie  $(A\text{-algèbres}) \rightarrow \text{Ens}$ . Le morphisme canonique  $F(K) \rightarrow F(\hat{K})$  est une injection.*

D'après [SGA<sub>4</sub> VII 5.7], on en déduit :

**Corollaire 5.2.3.** — *Soient  $A$  comme en 5.2.1,  $p$  un nombre premier et  $i$  un entier. Le morphisme canonique*

$$H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^i(\text{Spec}(\hat{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$$

*est une injection.*

**Démonstration du lemme 5.2.1.** — Il suffit de démontrer que pour toute sous- $K$ -algèbre de type fini  $B$  de  $\hat{K}$ , le morphisme  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(K)$  a une section. L'inclusion  $K$ -linéaire  $B \rightarrow \hat{K}$  correspond à un  $\hat{K}$ -point d'un système d'équations convenables  $f_1, \dots, f_r$  (définissant  $B$  sur  $K$ ) que l'on peut supposer à coefficients dans  $A$ . Quitte à chasser comme en 2.2.8 (démonstration) les dénominateurs, on peut appliquer 2.2.9 pour obtenir un  $K$ -point, c'est-à-dire une section du morphisme  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(K)$ .  $\square$

**5.3.** — En plus des hypothèses en vigueur dans 5.1, on suppose maintenant  $A$  complet.

Pour pouvoir utiliser le théorème de structure de Cohen-Gabber (7.1) — qui suppose la « fibre spéciale » réduite —, nous ferons usage du théorème suivant :

**Théorème 5.3.1 (Helmut Epp, [Epp73], théorème 1.9).** — Soit  $T \rightarrow S$  un morphisme local dominant de traits complets, de caractéristique résiduelle  $p > 0$ . Notons  $\kappa_S$  et  $\kappa_T$  leurs corps résiduels respectifs. Supposons  $\kappa_S$  parfait et le sous-corps parfait maximal de  $\kappa_T$  algébrique sur  $\kappa_S$ . Il existe une extension finie de traits  $S' \rightarrow S$  telle que le produit fibré réduit normalisé

$$T' := (T \times_S S')_{\text{red}}^\nu$$

ait une fibre spéciale réduite au-dessus de  $S'$ .

**Remarque 5.3.2.** — En caractéristique mixte, on vérifie immédiatement que le produit fibré  $T \times_S S'$  est réduit et que si l'on suppose seulement  $S$  complet (mais pas nécessairement  $T$ ), la conclusion est encore valable. (Cf. *loc. cit.*, §2 pour le cas général.)

**5.3.3.** — Commençons par vérifier que l'hypothèse sur les corps résiduels est satisfaite dans de nombreux cas. Nous dirons qu'une extension de corps  $K/k$  de caractéristique  $p > 0$  a la *propriété de Epp* si tout élément du sous-corps  $K^{p^\infty} := \bigcap_{i \geq 0} K^{p^i}$  de  $K$  est algébrique séparable sur  $k$ .

**Lemme 5.3.3.a.** — Pour tout corps  $K$  de caractéristique  $p > 0$ , on a, dans une clôture séparable  $K^{\text{sep}}$  de  $K$ ,

$$(K^{p^\infty})^{\text{sep}} = (K^{\text{sep}})^{p^\infty}.$$

*Démonstration.* — L'inclusion  $(K^{p^\infty})^{\text{sep}} \subset (K^{\text{sep}})^{p^\infty}$  est évidente :  $K^{p^\infty}$  est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable  $(K^{p^\infty})^{\text{sep}}$ , l'est également. Comme cette dernière est contenue dans  $K^{\text{sep}}$ , elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait  $(K^{\text{sep}})^{p^\infty}$ .

Réciproquement, considérons  $x \in (K^{\text{sep}})^{p^\infty}$ , et notons, pour chaque entier  $n \geq 0$ ,  $x_n$  sa racine  $p^n$ -ième dans  $K^{\text{sep}}$  et  $f_n$  son polynôme minimal (*unitaire*). Compte tenu d'une part de l'expression de  $f_n$  en fonction des polynômes symétriques en les conjugués galoisiens de  $x_n$  et d'autre part de l'injectivité et de l'additivité de l'élévation à la puissance  $p^n$ -ième, on a l'égalité  $f_0 = f_n^{(p^n)}$ , où  $f_n^{(p^n)}$  est le polynôme obtenu à partir de  $f_n$  en élevant les coefficients à la puissance  $p^n$ -ième. Il en résulte que les coefficients du polynôme minimal  $f_0$  de  $x$  appartiennent à  $K^{p^\infty}$ . □

**Proposition 5.3.3.b (Cf. [Epp73], §0.4).** —

- i. Soient  $L/K$  et  $K/k$  ayant la propriété de Epp. Alors,  $L/k$  a la propriété de Epp.
- ii. Toute extension finie a la propriété de Epp.
- iii. Pour tout entier  $d$ , et tout corps  $k$ , l'extension  $(\text{Frac } k[[x_1, \dots, x_d]])/k$  a la propriété de Epp.
- iv. Soient  $A$  un anneau local complet noethérien intègre, et  $k \subset A$  un corps de représentants (s'envoyant isomorphiquement sur le corps résiduel de  $A$ ). Alors, l'extension  $(\text{Frac } A)/k$  a la propriété de Epp.

*Démonstration.* — (i) Par hypothèse,  $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sep}}$ . Comme le corps  $L^{p^\infty}$  est parfait, on en déduit que  $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sep}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sep}} \subset k^{\text{sep}}$ , où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle  $K/k$ . Si elle est de hauteur  $\leq r$ , on a  $K^{p^r} \subset k$  et en particulier  $K^{p^\infty} \subset k \subset k^{\text{sep}}$ .

(iii) Soit  $A = k[[x_1, \dots, x_d]]$  et  $K$  son corps des fractions. Montrons que  $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$ . Comme  $K$  est contenu dans  $k((x_1, \dots, x_{d-1}))(x_d)$ , on se ramène par récurrence au cas où  $d = 1$ . Tout élément non nul de  $k((t))^{p^\infty}$  a une valuation infiniment  $p$ -divisible donc nulle, de sorte que  $k((t))^{p^\infty} - \{0\}$  est contenu dans  $k[[t]]^\times$  et finalement dans  $k^{p^\infty}$  par un calcul immédiat.

(iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen.

□

**5.3.4.** — Soit  $k_0 = k^{p^\infty}$  le sous-corps parfait maximal du corps résiduel  $k$  de  $A$  et notons  $W_0 = W(k_0)$  l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte du théorème de Cohen que l'on a un morphisme  $X := \text{Spec}(A) \rightarrow S_0 := \text{Spec}(W_0)$  relevant l'inclusion  $k_0 \hookrightarrow k$  ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.6]).

Pour tout point maximal  $\mathfrak{p}$  de la fibre spéciale  $X_p$ , l'anneau de valuation discrète  $A_{\mathfrak{p}}$  a pour corps résiduel  $\text{Frac } A/\mathfrak{p}$ , où  $A/\mathfrak{p}$  est un anneau complet intègre noethérien de corps résiduel  $k$ . D'après 5.3.3.b (i) & (iv), l'extension  $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$  satisfait donc l'hypothèse du théorème de Epp. Les idéaux  $\mathfrak{p}$  étant en nombre fini et la conclusion du théorème de Epp (5.3.1 et 5.3.2) étant stable par changement de base fini (c'est un résultat de lissité formelle), il existe donc un changement de base fini  $S'_0 = \text{Spec}(W'_0) \rightarrow S_0$  tel que la fibre spéciale du produit fibré normalisé  $X' := (X \times_{S_0} S'_0)^\nu = \text{Spec}(A')$  soit réduite en ses points maximaux. (On utilise le fait que les points maximaux de la fibre spéciale de  $X' \rightarrow S'_0$  se trouvent au-dessus des points maximaux de la fibre spéciale de  $X \rightarrow S_0$ ; cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 16.1.6].)

D'après le lemme suivant, la fibre spéciale est alors réduite.

**Lemme 5.3.4.a.** — *Soit  $X$  un schéma noethérien normal. Tout diviseur de Cartier effectif génériquement réduit est réduit.*

**5.3.5.** — Notons  $k'_0$  le corps résiduel de  $W'_0$ , fini sur  $k_0$ ,  $\varpi'$  une uniformisante de  $W'_0$ , et considérons une composante connexe  $X'' = \text{Spec}(A'')$  de  $X'$ . Soit  $k''$  son corps résiduel, fini sur  $k$ . L'inclusion  $k'_0 \hookrightarrow k''$  déduite du morphisme  $X'' \rightarrow S'$  est formellement lisse, car  $k'_0$  est parfait, donc se relève d'après [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.7. 1 et 2] en un morphisme *formellement lisse*  $W'_0 \rightarrow I''$  où  $I''$  est un anneau local complet noethérien. Cet anneau est un anneau de valuation discrète. L'anneau  $A''/\varpi'$  étant réduit (et équidimensionnel de dimension  $d-1$  de corps résiduel  $k''$ ), il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (7.1), un relèvement ( $k'_0$ -linéaire)  $k'' \hookrightarrow A''/\varpi'$  et des éléments  $x_1, \dots, x_{d-1}$  dans l'idéal maximal de  $A''/\varpi'$  tels que le morphisme induit  $k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''/\varpi'$ , envoyant l'indéterminée  $t_i$  sur  $x_i$ , soit fini, *génériquement étale* en haut et en bas.

Par lissité formelle de  $W'_0 \rightarrow I''$ , le morphisme composé  $I'' \rightarrow k'' \rightarrow A''/\varpi'$  se relève en un  $W'_0$ -morphisme  $I'' \rightarrow A''$ . En relevant les  $x_i$  dans  $A''$ , cela nous permet de construire un morphisme  $A''_0 := I''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''$ , fini injectif (cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale.

Notons  $K''$  le corps des fractions de  $A''$ .

**5.4.** — Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.4.1.** — *Les groupes  $H^N(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$  sont nuls pour  $N > \dim(A) + \dim_p(k)$ .*

Remarquons que  $\dim(A) = \dim(A'')$  et que  $\dim_p(k) = \dim_p(k'')$ .

Soit  $N$  comme ci-dessus et considérons une classe  $c \in H^N(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ . Nous allons commencer par montrer que  $c$  s'étend à un grand ouvert :

**Lemme 5.4.2.** — *Il existe un ouvert  $U \subset X''$  contenant les points maximaux de la fibre spéciale et une classe  $c_U \in H^N(U_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$  s'envoyant sur  $c$  par restriction à  $\text{Spec}(K'')$ .*

*Démonstration du lemme.* — Soit  $\mathfrak{p}$  un point maximal de la fibre spéciale  $\text{Spec}(A''/\varpi')$ . L'anneau  $A''$  étant normal, le localisé  $A''_{\mathfrak{p}}$  est un anneau de valuation discrète. Soit  $K''^h_{\mathfrak{p}}$  le corps des fractions de l'hensélisé de  $A''_{\mathfrak{p}}$  et  $c_{\mathfrak{p}}$  la restriction de  $c$  à  $\text{Spec}(K''^h_{\mathfrak{p}})$ . Il résulte du théorème de Katô (2.3.1) que l'on a  $\text{cd}_p(K''^h_{\mathfrak{p}}) = 1 + \dim_p(\text{Frac } A''/\mathfrak{p})$ . D'après 4.a, on a donc  $\text{cd}_p(K''^h_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(A'') + \dim_p(k'') < N$ , de sorte que  $c_{\mathfrak{p}} = 0$ . Joint au lemme ci-dessous, cela montre que la classe  $c$  appartient à l'image du morphisme de restriction  $H^N(\text{Spec}(A''_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^N(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ . Il existe donc, pour chaque  $\mathfrak{p}$  comme ci-dessus, un ouvert  $U_{\mathfrak{p}}$  de  $X''$  contenant  $\mathfrak{p}$  et une classe  $C_{\mathfrak{p}}$  sur  $U_{\mathfrak{p}}$  induisant  $c$  sur  $\text{Spec}(K)$ . Quitte à rétrécir ces ouverts, on peut utiliser inductivement la suite exacte de Mayer-Vietoris pour recoller ces  $C_{\mathfrak{p}}$  en une classe  $C_U$  sur  $U = \bigcup U_{\mathfrak{p}}$ .

□

**Lemme 5.4.3.** — Soit  $A$  un anneau de valuation discrète et notons  $K$  son corps des fractions. Considérons  $A^h$  son hensélisé,  $K^h$  son corps des fractions et  $c \in H^N(\mathrm{Spec}(K)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n)$ , où  $(n, N) \in \mathbf{N}^2$ . Si l'image de  $c$  dans  $H^N(\mathrm{Spec}(K^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n)$  est nulle, la classe  $c$  appartient à l'image du morphisme de restriction  $H^N(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^N(\mathrm{Spec}(K)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n)$ .

*Démonstration.* — Le morphisme  $\mathrm{Spec}(A^h) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$  induisant un isomorphisme sur les localisations strictes et un isomorphisme au-dessus du point fermé  $s$  de  $\mathrm{Spec}(A)$ , on voit facilement d'après [SGA<sub>4</sub> v 6.4 et 6.5] et [SGA<sub>4</sub> VIII 5.2] que le morphisme d'adjonction  $\mathrm{R}\Gamma_{\{s\}}(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\{s^h\}}(\mathrm{Spec}(A^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n)$  (où  $s^h$  est le point fermé de  $\mathrm{Spec}(A^h)$ ) est un isomorphisme. Le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^N(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^N(\mathrm{Spec}(K)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H_{\{s\}}^{N+1}(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{isom.} \\ H^N(\mathrm{Spec}(A^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^N(\mathrm{Spec}(K^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H_{\{s^h\}}^{N+1}(\mathrm{Spec}(A^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \end{array}$$

permet alors de conclure.  $\square$

Revenons à la démonstration de 5.4.1. On peut supposer  $d \geq 2$ , sans quoi le résultat est déjà connu. Notons  $\pi : X'' = \mathrm{Spec}(A'') \rightarrow X_0'' = \mathrm{Spec}(A_0'')$  le morphisme considéré en 5.3.5. Il est fini et *étale* au-dessus du complémentaire d'un fermé  $F_\pi$  de  $X_0''$  ne contenant pas la fibre spéciale (au-dessus de  $S_0'$ ). Notons  $F_c$  le fermé  $\pi(X'' - U) \subset X_0''$ , où  $U$  est comme en 5.4.2, et posons  $F := F_\pi \cup F_c$ . Par hypothèse,  $F$  est contenu dans le lieu d'annulation d'une fonction  $f \in A_0''$  telle que  $f \notin (\varpi')$ . Ainsi, d'après 4.3 (ii) et (i) (appliqué à  $\kappa = I'$  et  $\mathfrak{m} = (\varpi')$ ), on peut supposer que  $f$  appartient à  $I'[[x_1, \dots, x_{d-2}]]x_{d-1}$  et est *unitaire* en  $x_{d-1}$ .

De même qu'en égale caractéristique, il résulte du lemme 4.4 et du théorème 4.5 que l'on peut algébriser le morphisme  $\pi : \mathrm{Spec}(A'') \rightarrow \mathrm{Spec}(A_0'')$  : il existe un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'' = \mathrm{Spec}(A'') & \longrightarrow & \widetilde{X}'' = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}'') \\ \downarrow \pi & \square & \downarrow \text{fini, gén. étale} \\ X_0'' = \mathrm{Spec}(A_0'') & \longrightarrow & \widetilde{X}_0'' = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}_0'') \end{array}$$

où  $\widetilde{A}_0''$  est  $I''[[x_1, \dots, x_{d-2}]]\{x_{d-1}\}$ .

La paire  $(\widetilde{X}'', V(f))$  est hensélienne, car  $(\widetilde{X}_0'', V(f))$  l'est, de sorte qu'il résulte du théorème de comparaison de Fujiwara-Gabber ([Fuj95], 6.6.4) que le morphisme

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(\widetilde{X}'' - V(f), \mathbf{Z}/p) \rightarrow H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(X'' - V(f), \mathbf{Z}/p)$$

est un *isomorphisme*. Ainsi, la classe  $c \in H^N(\mathrm{Spec}(K'')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$ , qui a été préalablement étendue à  $X'' - V(f)$ , provient, par restriction, d'un élément de  $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(\widetilde{X}'' - V(f), \mathbf{Z}/p)$ . Soient  $\widetilde{K}''$  le corps des fonctions rationnelles du schéma intègre  $\widetilde{X}''$  et  $L$  le corps des fractions de l'anneau  $I''[[x_1, \dots, x_{d-2}]]$ . L'extension  $\widetilde{K}''/L$  est de degré de transcendance un de sorte que  $\mathrm{cd}_p(\widetilde{K}'') \leq 1 + \mathrm{cd}_p(L)$  (2.3.2). D'après l'hypothèse de récurrence, on sait d'autre part que  $\mathrm{cd}_p(L) \leq (\dim(A'') - 1) + \dim_p(k'')$ . Finalement,  $\mathrm{cd}_p(\widetilde{K}'') \leq \dim(A) + \dim_p(k)$  et  $c$ , qui appartient à l'image de  $H^N(\mathrm{Spec}(\widetilde{K}'')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^N(\mathrm{Spec}(K'')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$  est nul. (Rappelons que  $N > \dim(A) + \dim_p(k)$ .)

Ceci achève la démonstration de la proposition 5.4.1.

Soient  $K_0$  (resp.  $K_0'$ ) le corps des fonctions de  $S_0$  (resp.  $S_0'$ ). Par construction, il résulte de 5.4.1 que les groupes de cohomologie  $H^N(\mathrm{Spec}(K \otimes_{K_0} K_0')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$  sont nuls pour  $N > \dim(A) + \dim_p(k)$ .

**Corollaire 5.4.4.** — Soit  $\overline{K_0}$  une clôture séparable de  $K_0$ . Les groupes  $H^N(\mathrm{Spec}(K \otimes_{K_0} \overline{K_0})_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$  sont nuls pour  $N > \dim(A) + \dim_p(k)$ .

*Démonstration.* — Soit en effet  $\widetilde{W}/W'_0$  une extension finie. La fibre spéciale du morphisme  $\mathrm{Spec}(A' \otimes_{W'_0} \widetilde{W}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\widetilde{W})$  est encore réduite, de sorte que l'on peut appliquer le théorème de Epp et la proposition précédente pour en déduire la nullité de  $H^N(\mathrm{Spec}(K \otimes_{K_0} \mathrm{Frac}(\widetilde{W}))_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$ . On passe alors à la limite.  $\square$

**Proposition 5.4.5.** — *Soient  $A$ ,  $K$ ,  $k$  et  $p$  comme dans 1.2. Supposons  $A$  normal, complet de caractéristique mixte. On a alors l'inégalité :*

$$\mathrm{cd}_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k) + 2.$$

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

**Lemme 5.4.6.** — *Soient  $K$  un corps,  $N$  un entier et  $p$  un nombre premier. Supposons que pour toute extension finie séparable  $L$  de  $K$  on ait  $H^M(\mathrm{Spec}(L)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p) = 0$  pour tout  $M > N$ . Alors,  $\mathrm{cd}_p(K) \leq N$ .*

*Démonstration du lemme.* — Soient  $\overline{K}$  une clôture séparable de  $K$  et  $H$  un  $p$ -Sylow de  $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) =: G_K$ . On a l'égalité  $\mathrm{cd}_p(G_K) = \mathrm{cd}_p(H)$  ([Ser94], chap. I, §3.3, corollaire 1). Puisque que  $H$  est un  $p$ -groupe,  $\mathrm{cd}_p(H)$  est le plus grand entier  $D$  (s'il existe) tel que  $H^M(H, \mathbf{Z}/p) = 0$  pour tout  $M > D$  (*loc. cit.*, §4, proposition 21). Or, pour chaque  $M$ , le groupe  $H^M(H, \mathbf{Z}/p) = H^M(\overline{K}^H, \mathbf{Z}/p)$  est une colimite de groupes  $H^M(L, \mathbf{Z}/p)$  avec  $L/K$  finie étale. Sous nos hypothèses, les termes de cette colimite sont tous nuls pour  $M > N$  de sorte que  $\mathrm{cd}_p(H) \leq N$  comme escompté.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* — Rappelons que le corps  $K_0$  est un corps local à corps résiduel parfait de sorte que  $\mathrm{cd}_p(K_0) \leq 2$  (*loc. cit.*, chap. II, 4.3). Cette observation, jointe au résultat l'annulation 5.4.4, permet de déduire de la suite spectrale

$$E_2^{i,j} = H^i(G_{K_0}, H_{\mathrm{\acute{e}t}}^j(K \otimes_{K_0} \overline{K}_0, \mathbf{Z}/p)) \Rightarrow H_{\mathrm{\acute{e}t}}^{i+j}(K, \mathbf{Z}/p)$$

l'annulation des groupes  $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(K, \mathbf{Z}/p)$  pour  $N > \dim(A) + \dim_p(k) + 2$ . Ceci étant également valable pour les extensions finies de  $K$ , on peut utiliser le lemme ci-dessus pour conclure.  $\square$

**5.5. Fin de la démonstration.** — Fixons  $d$  et  $r$  deux entiers et considérons le plus petit entier  $N$  tel que pour tout  $A$  comme en 5.4.5, de dimension  $d$  et de corps résiduel de  $p$ -dimension  $r$ , on ait  $\mathrm{cd}_p(\mathrm{Frac} A) \leq N$ . On a vu ci-dessus qu'un tel entier  $N$  existe (et est inférieur à  $d + r + 2$ ). D'après le lemme 5.4.6, il existe un anneau  $A$  comme ci-dessus, de corps des fractions  $K$  tel que  $H^N(\mathrm{Spec}(K)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p) \neq 0$ . Supposons par l'absurde  $N > d + r$ . D'après les résultats du paragraphe 5.3, il existe alors une extension finie  $L/K$  telle que  $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(L, \mathbf{Z}/p) = 0$ . Ce groupe est isomorphe à  $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(K, \mathrm{Ind}_K^L(\mathbf{Z}/p))$ . La surjection canonique  $\mathrm{Ind}_K^L(\mathbf{Z}/p) \rightarrow \mathbf{Z}/p$  de modules galoisiens (donnée par la trace) induit ici, puisqu'il n'y a pas de cohomologie en degré  $\geq N + 1$ , une *surjection*

$$0 = H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(L, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(K, \mathbf{Z}/p)$$

sur les groupes de cohomologie. Contradiction.

## 6. Le cas d'un ouvert de $A[p^{-1}]$

Dans cette section, on démontre le théorème suivant :

**Théorème 6.1.** — *Soit  $A$  un anneau hensélien excellent intègre de corps résiduel  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et de corps des fractions de caractéristique nulle. Alors, pour tout ouvert non vide affine  $U \subset \mathrm{Spec}(A[p^{-1}])$ , on a :*

$$\dim.\mathrm{coh}_p(U_{\mathrm{\acute{e}t}}) = \dim(A) + \dim_p(k).$$

Rappelons que pour tout topos  $T$  on note  $\dim.\text{coh.}_p(T)$  le plus grand entier  $d$  tel que  $H^d(T, \mathcal{F}) \neq 0$  pour au moins un faisceau de  $p$ -torsion  $\mathcal{F}$  (cf. [SGA<sub>4</sub> x §1] et [SGA<sub>4</sub> ix 1.1]).

On majore  $\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}})$  en procédant comme plus haut (cf. 6.3). Pour minorer  $\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}})$ , on se ramène au cas où  $U$  est le point générique par une astuce de globalisation d'une classe de cohomologie après un revêtement ramifié de degré 2 (cf. 6.2.1).

**6.2. Minoration.** — Soient  $A, k$  comme en 6.1 ; posons  $r = \dim(A) + \dim_p(k)$  que l'on suppose fini pour simplifier. On peut supposer  $A$  normal car d'une part  $A$  est japonais et d'autre part, pour tout morphisme fini  $A \rightarrow A'$ , on a  $\dim.\text{coh.}_p(A) \geq \dim.\text{coh.}_p(A')$ . Soit  $\xi$  un point maximal de  $V(p) \subset \text{Spec}(A)$ . Notons  $K_\xi^h$  le corps des fractions de l'hensélisé de l'anneau de valuation discrète  $A_\xi$ . Par hypothèse,  $\dim_p(K_\xi^h) = r$  de sorte qu'il existe une extension finie  $K'/K_\xi^h$  telle que  $\mu_p \subset K'$  et  $H^r(K', \mathbf{Z}/p) \neq 0$  (cf. 5.4.6). L'extension (séparable)  $K'/K_\xi^h$  peut être définie par un polynôme irréductible unitaire à coefficients dans  $K_\xi^h$ . Par unicité de l'extension de la norme de  $K_\xi^h$  à sa clôture séparable, le lemme de Krasner est applicable et l'on peut donc approximer les coefficients de ce polynôme par des éléments de  $K$  de sorte que l'extension  $K'/K_\xi^h$  soit définie sur  $K$ . Quitte à remplacer  $A$  par sa normalisation dans cette extension, on peut donc supposer que  $H^r(K_\xi^h, \mu_p^{\otimes r}) \neq 0$ . D'après les résultats de K. Katô ([Kat82], théorème 1), ce groupe est engendré par les *symboles* ; en particulier, il existe des éléments  $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in (K_\xi^h)^\times$  tels que la classe

$$c = \chi_{\varphi_1} \cup \dots \cup \chi_{\varphi_r} \in H^r(K_\xi^h, \mu_p^{\otimes r})$$

soit non nulle. Ci-dessus,  $\chi_{\varphi_i}$  est l'image de  $\varphi_i$  par le composé  $(K_\xi^h)^\times \rightarrow (K_\xi^h)^\times / (K_\xi^h)^{\times p} \rightarrow H^1(K_\xi^h, \mu_p)$ .

Remarquons que l'anneau  $A_\xi^h$  étant hensélien, il existe un entier  $N$  tel que

$$(\star) \quad 1 + \mathfrak{m}_\xi^N \subset (1 + \mathfrak{m}_\xi)^p$$

dans cet anneau. Il en résulte immédiatement que l'on peut approximer les  $\varphi_i$  par des éléments de  $K$  sans changer les  $\chi_{\varphi_i}$ .

On va montrer dans la proposition suivante qu'il existe une classe de cohomologie dans  $H^r(\text{Spec}(A[p^{-1}]), \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F}$  est un  $\mathbf{Z}/p$ -faisceau, non nulle en restriction au corps des fractions. La minoration désirée (pour tout ouvert affine non vide  $U$  comme dans l'énoncé du théorème) s'en déduit immédiatement.

**Proposition 6.2.1** ([Gab06]). — *Soient  $A, \xi$  et  $c$  comme ci-dessus. Pour tout voisinage ouvert  $W \subset \text{Spec}(A)$  de  $\xi$ , il existe un morphisme surjective, fini et plat de rang 2,  $\pi : U' \rightarrow U := \text{Spec}(A[p^{-1}])$ , tel que si l'on note  $j'$  l'immersion ouverte  $(W \cap U)' := \pi^{-1}(W \cap U) \hookrightarrow U'$ , il existe également une classe  $c' \in H^r(U', j'_! \mu_p^{\otimes r})$  telle que  $\pi$  soit (étale et) décomposé sur  $U_\xi^h := \text{Spec}(K_\xi^h)$*

$$U' \times_U U_\xi^h \simeq U_\xi^h \coprod U_\xi^h,$$

de telle façon que  $c'$  induise par restriction  $(c, -c)$  sur  $U_\xi^h \coprod U_\xi^h$ .

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas particulier où  $r = 1$ . Remarquons tout d'abord à cette effet que si la conclusion de la proposition est vraie pour un ouvert  $W_0$ , elle l'est pour tout ouvert  $W$  le contenant. Quitte à rétrécir  $W$ , on peut donc supposer les fonctions  $\varphi_i$  inversibles sur  $W \cap U$ . Le produit (cf. p. ex. [SGA<sub>4</sub>, 5 CYCLE 1.2.4])

$$H^1((W \cap U)', \mu_p) \otimes \dots \otimes H^1((W \cap U)', \mu_p) \otimes H^1(U', j'_! \mu_p) \rightarrow H^r(U', j'_! \mu_p^{\otimes r})$$

$$\chi_{\varphi_2} \otimes \dots \otimes \chi_{\varphi_r} \otimes c'_1 \mapsto c'$$

fournit une classe  $c'$  à partir du cas  $r = 1$  et des symboles associés aux  $r - 1$  dernières fonctions.

Supposons  $W = \text{Spec}(A[h^{-1}])$ . Quitte à diviser  $\varphi$  par une puissance de  $h^p$ , on peut supposer que  $\varphi^{-1}$  s'étend en une fonction  $\psi$  sur  $U$ , divisible par  $h^2$ . Enfin, quitte à multiplier  $\varphi$  par une puissance convenable de  $p^p$  (inversible sur  $U$ ), on peut également supposer que  $v_\xi(\varphi) \geq N$ .

Considérons le revêtement  $U'_0$  de  $U$  défini par l'équation :

$$f(X) := X^2 - (\psi + 2)X + 1 = 0.$$



Observons dès maintenant que la fonction  $X$  est inversible sur  $\mathcal{O}_{U'_0}$ . Le polynôme unitaire  $g(X) := \varphi^2 f(\frac{X}{\varphi}) = X^2 - (1 + 2\varphi)X + \varphi^2$  (congru à  $X(X-1)$  modulo  $\mathfrak{m}_\xi$ ) satisfait aux conditions  $g(1) \in (\varphi)$  (resp.  $g(\varphi^2) \in (\varphi^3)$ ) et  $g'(1) \in A_\xi^\times$  (resp.  $g'(\varphi^2) \in A_\xi^\times$ ); le polynôme  $f$  possède donc deux racines  $x$  et  $x'$  dans  $K_\xi^h$  telles que  $x \equiv \varphi \pmod{(\varphi^2)}$  et  $x' \equiv \varphi^{-1} \pmod{(1)}$ . Il existe donc  $a \in A_\xi^h$  tel que  $x = \varphi(1 + a\varphi)$ ; par hypothèse sur  $\varphi$  et  $N$ ,  $(1 + a\varphi) \in K_\xi^{h \times p}$ , de sorte que  $\chi_x = \chi_\varphi$  dans  $H^1(K_\xi^h, \mu_p)$ . Il en résulte immédiatement que  $\chi_{x'} = -\chi_\varphi$ . Soit  $U'$  le normalisé de  $U'_0$  dans  $U'[\frac{1}{h}]$ ; puisque par hypothèse  $h^2$  divise (dans  $\mathcal{O}_{U'_0}$ )  $\psi$ , ainsi donc que son multiple  $(X-1)^2$ , on a  $h|X-1$  dans  $\mathcal{O}_{U'}$ . La fonction  $X$  est donc une section sur  $U'$  du faisceau  $\mathbf{G}_{mU', V(h)} := \text{Ker}(\mathbf{G}_{mU'} \rightarrow i_* \mathbf{G}_{mV(h)})$ , où l'on note  $i$  l'immersion fermée  $V(h) \hookrightarrow U'$ . Soit  $j'$  l'immersion ouverte complémentaire. Puisque  $p$  est inversible sur  $U'$ , on a une suite exacte

$$1 \rightarrow j'_! \mu_p \rightarrow \mathbf{G}_{mU', V(h)} \xrightarrow{f \mapsto f^p} \mathbf{G}_{mU', V(h)} \rightarrow 1.$$

qui étend la suite exacte usuelle de Kummer sur  $K_\xi^h$ . L'image de  $X$  par le morphisme cobord est la classe de cohomologie  $c'$  recherchée.

**6.3. Majoration.** — On procède par récurrence sur  $\dim(A)$ . Le cas de la dimension 1 est dû à K. Katô. Le théorème de Lefschetz pour les morphismes affines de type fini entre  $\mathbf{Q}$ -schémas excellents ([SGA<sub>4</sub> XIX 6.1]), nous ramène (grâce à l'hypothèse de récurrence) au cas particulier où  $U = \text{Spec}(A[p^{-1}])$ . La méthode de la trace ([SGA<sub>4</sub> IX 5.6]) nous ramène à montrer l'annulation de  $H^n(\text{Spec}(A[p^{-1}]), \mathbf{Z}/p)$  pour  $n > \dim(A) + \dim_p(k) =: r$ . On peut également supposer  $A$  normal et complet. Soit  $k_0$  le sous-corps parfait maximal de  $k$ . Comme rappelé ci-dessus (§5.3), il existe une extension finie  $W'/W(k_0)$  telle que le morphisme  $\text{Spec}(A \otimes_{W(k_0)} W')^\nu \rightarrow \text{Spec}(W')$  ait une fibre spéciale réduite. Procédant comme en §5.4, le résultat pour  $A[p^{-1}] \otimes_{W(k_0)} W'$  se ramène par algébrisation au résultat analogue dans le cas particulier où  $A$  est l'hensélisation d'une algèbre de type fini sur un anneau (local excellent)  $B$  de dimension un de moins, et que l'extension résiduelle pour  $A/B$  est finie. D'après le théorème de Lefschetz affine (cf. *op. cit.*), cela résulte de l'hypothèse de récurrence. La conclusion étant également valable pour les extensions finies de  $W'$ , on a donc :

$$H^n(A[p^{-1}] \otimes_{K_0} \overline{K_0}, \mathbf{Z}/p) = 0 \quad \forall n > r,$$

où l'on note  $K_0 = \text{Frac } W(k_0)$ .

Puisque  $\text{cd}_p(K_0) \leq 2$ , il s'en suit que pour tout  $\mathbf{F}_p[G_{K_0}]$ -module  $V$ , et tout  $n > r + 2$ , on a  $H^n(A[p^{-1}], V) = 0$ . Comme en §5.5, on observe que pour tout tel  $V$ , il existe une surjection  $V' \twoheadrightarrow V$  où  $V'$  est une somme directe d'induites de représentations triviales de petits (c'est-à-dire contenus dans  $G_{\text{Frac } W'}$ ) sous-groupes ouverts. Pour un tel  $V'$  on connaît le résultat d'annulation pour  $n > r$ . L'annulation du  $H^n$  pour  $V$  se ramène donc à l'annulation du  $H^{n+1}$  pour  $\text{Ker}(V' \twoheadrightarrow V)$ . On obtient la majoration désirée en procédant ainsi une fois de plus.

## 7. Appendice : le théorème de structure de Cohen-Gabber

**Théorème 7.1** ([Gab05a], lemme 8.1). — *Soit  $A$  un anneau local complet noethérien réduit, d'égale caractéristique  $p > 0$ , équidimensionnel de dimension  $d$  et de corps résiduel  $k$ . Il existe un sous-anneau  $A_0$  de  $A$ , isomorphe à  $k[[t_1, \dots, t_d]]$ , tel que  $A$  soit fini sur  $A_0$ , sans torsion et génériquement étale. De plus, le morphisme  $A_0 \rightarrow A$  induit un isomorphisme sur les corps résiduels.*

Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse (dans le cas intègre) dans [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.9.5].

La démonstration du théorème, tirée de [Gab05a], occupe le reste de cette section.

**7.2.** — Soient  $t_1, \dots, t_d \in A$  un système de paramètres,  $\{b_i\}_{i \in I}$  une  $p$ -base de  $k = A/\mathfrak{m}_A$ ,  $\{\beta_i\}_{i \in I}$  des relèvements des  $b_i$  dans  $A$  (que nous changerons par la suite), et  $\kappa \subset A$  le corps de représentants correspondant (cf. [Bourbaki, A.C. chap. IX, §2, N°2]).

Notons  $C$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $A$ ,  $\{\wp_\alpha\}_{\alpha \in C}$  l'ensemble des idéaux premiers minimaux de  $\text{Spec}(A)$ , et  $A_\alpha := A/\wp_\alpha$  l'anneau intègre de dimension  $d$  correspondant à la

composante irréductible  $\alpha$ . L'anneau  $A$  étant réduit, on a  $(0) = \cap_{\alpha} \wp_{\alpha}$ ; c'est une décomposition primaire *réduite* :  $\forall \alpha, \cap_{\beta \neq \alpha} \wp_{\beta} \subsetneq \wp_{\alpha}$ .

Pour tout ensemble fini  $e \subset I$ , posons  $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i, i \notin e) \subset \kappa$ . Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

$$(\star) \quad [\kappa : \kappa_e] < +\infty, \quad \kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'} \text{ et } \cap_{e \subset I} \kappa_e = \kappa^p.$$

**7.3.** — Pour simplifier les notations, fixons  $\alpha \in C$  et posons  $B = A_{\alpha}$ ,  $L$  son corps des fractions et  $\tau_i$  l'image de  $t_i \in A$  dans  $B$  par la surjection canonique. Considérons les anneaux suivants :

$$R_{\kappa} = \kappa[[\tau_1, \dots, \tau_d]] \subset B,$$

$$L_{\kappa} = \text{Frac } R_{\kappa} \subset L,$$

$$R_{\kappa, e} = \kappa_e[[\tau_1^p, \dots, \tau_d^p]] \subset R_{\kappa},$$

$$L_{\kappa, e} = \text{Frac } R_{\kappa, e} \subset L_{\kappa};$$

les morphismes d'inclusion sont finis (cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8], démonstration). Les  $\tau_i$  ci-dessus sont analytiquement indépendants sur  $\kappa : R_{\kappa}$  est un anneau de séries formelles.

D'après [Mat89], §30, lemme 6, et l'analogue de  $(\star)$  pour les sous-corps  $L_{\kappa, e}$  de  $L_{\kappa}$ , on a l'égalité

$$\text{rang}_L \Omega_{L/L_{\kappa, e}}^1 = \text{rang}_{L_{\kappa}} \Omega_{L_{\kappa}/L_{\kappa, e}}^1,$$

dès que l'ensemble fini  $e$  est suffisamment grand.

En particulier, on peut supposer cette égalité valable pour chaque composante irréductible  $\alpha$ .

Le terme de gauche est le rang (générique) du  $B$ -module  $\Omega_{B/R_{\kappa, e}}^1$ ; remarquons que d'après [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.9.4],  $\Omega_{B/R_{\kappa, e}}^1$  s'identifie au module  $\widehat{\Omega}_{B/\kappa_e}^1$  des formes différentielles *continues*. Le terme de droite est le rang du  $R_{\kappa, e}$ -module libre  $\Omega_{R_{\kappa, e}/R_{\kappa}}^1$ . Ce dernier est égal à  $d + \text{rang}_{\kappa} \Omega_{\kappa, \kappa_e}^1 = d + |e|$  de sorte que l'on a :

$$(7.a) \quad \text{rang}_B \widehat{\Omega}_{B/\kappa_e}^1 = d + |e|$$

**Lemme 7.3.1.** — *Pour tout idéal non nul  $I$  de  $B$ , l'ensemble des  $d(i) \otimes_B L$ , pour  $i \in I$ , est une famille génératrice du  $L$ -espace vectoriel  $\widehat{\Omega}_{B/\kappa_e}^1 \otimes_B L$ .*

*Démonstration.* En effet, si  $i_0 \in I$  est non nul et si l'on pose  $v_0 = d(i_0)$ , l'ensemble  $d(Bi) = \{bv_0 + i_0 db, b \in B\}$  contient  $v_0$  et est générateur puisque l'ensemble des  $db$  l'est.  $\square$

**7.4.** — Supposons  $e$  choisi comme ci-dessus et  $d > 0$  sans quoi le théorème est trivial. Identifions l'ensemble  $C$  des composantes irréductibles de  $\text{Spec}(A)$  à l'ensemble  $\{1, \dots, c\}$ , et notons pour tous  $i \in e$  et  $j \in \{1, \dots, c\}$ ,  $\beta_{i, j}$  l'image dans  $A_j = A/\wp_j$  de  $\beta_i \in A$ . (Rappelons que les  $\beta_i$  font partie d'une  $p$ -base de  $\kappa \subset A$ .) Fixons  $0 \leq j \leq c-1$  et supposons qu'il existe des éléments  $\{m_i\}_{i \in e}$  dans  $\mathfrak{m}_A$  tels que les images des éléments  $\beta_i + m_i$  dans chacun des anneaux  $A_1, \dots, A_j$  ait des différentielles linéairement indépendantes (dans  $\Omega_{A_1/R_{\kappa, e}}^1 \otimes_{A_1} \text{Frac } A_1, \dots, \Omega_{A_j/R_{\kappa, e}}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ ). (Pour  $j = 0$ , cette condition est vide.) Vérifions qu'il en est de même pour  $j+1$ . On peut supposer que les  $m_i$  ( $i \in e$ ) sont nuls; nous le ferons pour simplifier les notations. Afin de ne pas altérer les choix précédents sur les composantes  $A_1, \dots, A_j$ , on considère l'idéal  $\wp_1 \cap \dots \cap \wp_j = \text{Ker}(A \rightarrow A_1 \times \dots \times A_j)$ . Comme rappelé plus haut,  $\wp_1 \cap \dots \cap \wp_j \subsetneq \wp_{j+1}$  de sorte que son image dans  $B := A/\wp_{j+1}$  est un idéal non nul. Si  $j > 0$ , nous noterons  $I$  son image; si  $j = 0$ , posons  $I = \mathfrak{m}_B$ . D'après les résultats du paragraphe précédent,  $\text{rang}_B \widehat{\Omega}_{B/\kappa_e}^1 = d + |e| \geq |e|$  et la famille  $d(I)$  est génératrice dans  $\widehat{\Omega}_{B/\kappa_e}^1 \otimes_B L$  (où  $L = \text{Frac } B$ ). Il existe donc des éléments  $m'_i \in I$ ,  $i \in e$ , tels que les différentielles des éléments  $d(\beta_{i, j+1} + m'_i)$ ,  $i \in e$ , soient linéairement indépendantes. Il suffit alors de relever les  $m'_j$  dans  $\wp_1 \cap \dots \cap \wp_j \subset \mathfrak{m}_A$  si  $j > 0$ , ou simplement dans  $\mathfrak{m}_A$  si  $j = 0$ , pour obtenir les éléments souhaités.

**7.5.** — D'après les résultats des deux paragraphes précédents, il existe un ensemble fini  $e$  tel que *pour chaque composante irréductible*  $B$  de  $A$  on ait  $\text{rang}_B \widehat{\Omega}_{B/\kappa_e}^1 = d + |e|$  et d'autre part des éléments  $\beta'_i$ ,  $i \in e$ , relevant les  $b_i$ , dont les différentielles sont linéairement indépendantes dans ces groupes. Si l'on considère le corps  $\kappa' := \kappa^p(\beta_i, i \notin e; \beta'_i, i \in e) = \kappa_e(\beta_i, i \in e) \subset A$ , celui-ci s'envoie isomorphiquement sur  $k$  par la surjection canonique  $A \rightarrow k = A/\mathfrak{m}_A$  et l'on a

$$\text{rang}_B \widehat{\Omega}_{B/\kappa'}^1 = d$$

pour toute composante irréductible  $B$  de  $A$ . Pour simplifier les notations nous noterons ce nouveau corps de représentants  $\kappa$ .

Le  $A$ -module  $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$  étant de rang (générique)  $d$  sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment, qu'il existe des éléments  $f_1, \dots, f_d$  de  $A$  tels que les  $d(f_i \bmod \wp_\alpha) \otimes_{A_\alpha} \text{Frac } A_\alpha$  forment une base de  $\widehat{\Omega}_{A_\alpha/\kappa}^1 \otimes_{A_\alpha} \text{Frac } A_\alpha$  pour chaque composante irréductible  $A_\alpha$ . Quitte à les multiplier par une puissance  $p$ -ième d'un élément non nul appartenant à  $\mathfrak{m}_A$ , on voit que l'on peut les supposer dans  $\mathfrak{m}_A$ . Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres  $t_1, \dots, t_d$  dans  $A$ , de sorte qu'en particulier, comme rappelé plus haut, le morphisme  $A/k[[t_1, \dots, t_d]]$  est fini.

Posons, pour  $i \in [1, d]$ ,

$$t'_i := t_i^p(1 + f_i).$$

Soit  $A_0$  le sous-anneau  $\kappa[[t'_1, \dots, t'_d]]$  de  $A$ . Le morphisme  $A/A_0$  est fini : cela résulte du fait que les éléments  $1 + f_i$  sont des unités de  $A$ . Il est génériquement étale sur chaque composante irréductible compte tenu de l'hypothèse sur les éléments  $f_i$  et de la formule

$$d(t'_i) = t_i^p df_i.$$

## Références

- [Bas78] G. G. BASTOS – « Some results on the degree of imperfection of complete valued fields », *Manuscripta Math.* **25** (1978), no. 4, p. 315–322.
- [BK86] S. BLOCH & K. KATÔ – «  $p$ -adic étale cohomology », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1986), no. 63, p. 107–152.
- [BT73] H. BASS & J. TATE – « The Milnor ring of a global field », *Algebraic K-theory, II : "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic*, Springer, Berlin, 1973, p. 349–446. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 342.
- [CT99] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – « Cohomologie des corps valués henséliens, d'après K. Katô et S. Bloch », *Algebraic K-theory and its applications*, Trieste, 1997 (Notes d'un cours fait à Bordeaux et à Trieste), World Scientific, 1999, p. 120–163.
- [Elk73] R. ELKIK – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. sci. École norm. sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603.
- [Epp73] H. EPP – « Eliminating wild ramification », *Invent. Math.* **19** (1973), p. 235–249.
- [Fuj95] K. FUJIWARA – « Theory of tubular neighborhood in étale topology », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 1, p. 15–57.
- [Fuk01] T. FUKAYA – « Explicit reciprocity laws for  $p$ -divisible groups over higher dimensional local fields », *J. Reine Angew. Math.* **531** (2001), p. 61–119.
- [Gab05a] O. GABBER – « A finiteness theorem for non abelian  $H^1$  of excellent schemes », Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Luc Illusie, Orsay, juin 2005. Disponibles par exemple depuis la page internet de F. Orgogozo, 2005.
- [Gab05b] ———, « Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes », Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Pierre Deligne, Princeton, octobre 2005. Disponibles par exemple depuis la page internet de F. Orgogozo, 2005.
- [Gab06] ———, Lettre à F. Orgogozo, automne 2006.
- [Ill79] L. ILLUSIE – « Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline », *Ann. Sci. École norm. sup. (4)* **12** (1979), no. 4, p. 501–661.
- [Kat70] N. M. KATZ – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1970), no. 39, p. 175–232.

- [Kat82] K. KATÔ – « Galois cohomology of complete discrete valuation fields », Algebraic  $K$ -theory, Part II (Oberwolfach, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 967, Springer, Berlin, 1982, p. 215–238.
- [Kat89] K. KATO – « Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case », Algebraic  $K$ -theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 101–131.
- [KK86] K. KATÔ & T. KUZUMAKI – « The dimension of fields and algebraic  $K$ -theory », *J. Number Theory* **24** (1986), no. 2, p. 229–244.
- [Mat89] H. MATSUMURA – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Mat02] K. MATSUMI – « A Hasse principle for three-dimensional complete local rings of positive characteristic », *J. Reine Angew. Math.* **542** (2002), p. 113–121.
- [Pop86] D. POPESCU – « General Néron desingularization and approximation. », *Nagoya Math. J.* **104** (1986), p. 85–115.
- [Sai86] S. SAITÔ – « Arithmetic on two-dimensional local rings », *Invent. Math.* **85** (1986), no. 2, p. 379–414.
- [Ser68] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser94] ———, *Cohomologie galoisienne (cinquième édition révisée et complétée)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Tsu96] T. TSUJI – « Syntomic complexes and  $p$ -adic vanishing cycles », *J. Reine Angew. Math.* **472** (1996), p. 69–138.

---

OFER GABBER, CNRS et IHÉS, Le Bois-Marie, 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France  
*Courriel* : `Gabber@ihes.fr`

FABRICE ORGOGOZO, CNRS et Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France • *Courriel* : `Fabrice.Orgogozo@math.polytechnique.fr`  
*Adresse réticulaire* : `http://www.math.polytechnique.fr/~orgogozo/`